A gyökvonás

Racionális számok, irracionális számok

Definíció: A két egész szám hányadosaként felírható számokat *racionális számok*nak nevezzük.

Például: $\frac{5}{8}$; $-\frac{13}{9}$; $\frac{138}{339}$; $2{,}243$; $-12{,}876$

Definíció: *Irracionális szám*nak nevezzük azokat a számokat, amelyek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos.

Például: π; $1,23233233323333$ ....

Tétel: A $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Definíció: A racionális számok halmazának és az irracionális számok halmazának uniója a *valós számok halmaza*.

Valós számok halmazának jele: $\mathbb{R}$, az irracionális számok halmaza pedig $\mathbb{I}$.

Ezekkel a jelölésekkel: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$

Négyzetgyökvonás azonosságai

Definíció: Ha $a \geq 0$ akkor $\sqrt{a}$ jelöli azt a nem negatív számot, amelynek négyzete a.

Tétel: Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, ha\ a, b \geq 0.$$

Példa: Számítsuk ki a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ értékét!

Megoldás: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$

Tétel: Tört négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, ha\ a \geq 0\ \text{és}\ b > 0.$$

Példa: Számítsuk ki $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ kifejezést!

Megoldás: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

Tétel: A négyzetgyökvonás és a hatványozás művelete felcserélhető.

$$\sqrt{a}^{k} = \sqrt{a^{k}}, ahol\ a > 0\ \text{és}\ k\ egész\ szám$$

Nevezetes azonosságok (emlékeztető):

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Az azonosságok alkalmazása

- Bevitel a gyökjel alá

Példa: $4\sqrt{5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{80}$

- Kiemelés gyökjel alól

Példa: $\sqrt{250} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{10}$

- Tört nevezőjének gyöktelenítése

Példa: $\frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

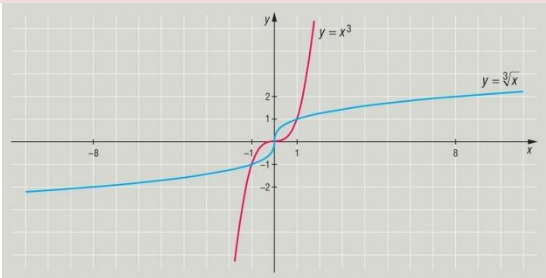
$$\frac{7}{2+\sqrt{5}} = \frac{7}{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{7 \cdot (2-\sqrt{5})}{2^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{7 \cdot (2-\sqrt{5})}{-1} = -7 \cdot (2-\sqrt{5})$$

Egyéb okosságok:

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\left(\sqrt{a} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{a} + 1\right) = a - 1$
- $\left(2\sqrt{a} - 1\right) \cdot \left(2\sqrt{a} + 1\right) = 4a - 1$

A számok n-edik gyöke

Definíció: Az a valós szám *köbgyöke* az a valós szám, amelynek harmadik hatványa a.$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a;\ a\ valós\ szám$



Definíció: Egy nemnegatív a szám $2k$-adik gyökén (k természetes és nem 0 szám) azt a nemnegatív számot értjük, amelynek $2k$-adik hatványa a.

Definíció: Egy a valós szám ($2k+1$)-edik gyökén (k természetes és nem 0 szám) azt a valós számot értjük, amelynek ($2k+1$)-edik hatványa a.

Az n-edik gyökvonás azonosságai

Tétel: Szorzat n-edik gyöke megegyezik a tényezők n-edik gyökének szorzatával.

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, ahol $a, b\ \geq 0, n \in N, n \geq 2$

Példa: Számítsuk ki a $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ értékét!

$$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

Tétel: Tört n-edik gyöke egyenlő a számláló és a nevező n-edik gyökének hányadosával.

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, ahol $a, b \geq 0,\ n \in N, n \geq 2$

Példa: Számítsuk ki az $\frac{\sqrt[5]{224}}{\sqrt[5]{7}}$ értékét!

$\frac{\sqrt[5]{224}}{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[5]{\frac{224}{7}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

Tétel: A gyökvonás és a hatványozás felcserélhető műveletek.

$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ ahol $a \geq 0,\ n, k \in N,\ m \in Z,\ n, k \geq 2$

Példa: Számítsuk ki az $\left(\sqrt[3]{7}\right)^9$ hatvány értékét!

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^9 = \sqrt[3]{7^9} = 7^3$$

Tétel: Gyöknek a gyökét felírhatjuk úgy is, hogy a gyökjelek alatti kifejezésből olyan kitevővel vonunk gyököt, amely az eredeti gyökkitevők szorzata.

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$, ahol $a \geq 0,\ n, m \in N,\ n, m \geq 2$

Példa: Írjuk fel a $\sqrt[7]{4\sqrt[3]{8}}$ számot egy gyökjellel!

$$\sqrt[7]{4 \cdot \sqrt[3]{8}} = \sqrt[7]{\sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{8}} = \sqrt[7]{\sqrt[3]{64 \cdot 8}} = \sqrt[21]{512}$$

Tétel: A gyök és a hatványkitevő egyszerűsíthető, illetve bővíthető.

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$ ahol $a \geq 0,\ k \in Z,\ n \in N, n \geq 2$

Példa: Végezzük el a műveleteket: $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[8]{5^3}$!

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[8]{5^3} = \sqrt[24]{5^8}\sqrt[24]{5^9} = \sqrt[24]{5^8 \cdot 5^9 =} \sqrt[24]{5^{17}}$$

<u>Az azonosságok alkalmazása</u>

- Bevitel a gyökjel alá

Példa: $4\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{4^4} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{4^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{1280}$

- Kiemelés gyökjel alól

Példa: $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{2} = 5 \cdot \sqrt[3]{2}$

- Tört nevezőjének gyöktelenítése

Példa: $\frac{8}{\sqrt[3]{4}} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{8 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{4^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^4} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^1} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{2^1} = 4\sqrt[3]{2}$