A másodfokú egyenlet

A másodfokú egyenlet

Olyan egyenlet, melyben megtalálható a keresett ismeretlen a második hatványon, de ennél nagyobb hatványon nem.

Definíció: az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja: $ax^2 + bx + c = 0$, ahol a, b, c valós számok és $a \neq 0$.

A hiányos másodfokú egyenletek

Azokat a másodfokú egyenleteket, amelyekben nem szerepel az ismeretlen első hatványon (nincs benne x) vagy a nulladik hatványon (nincs benne „szám”) hiányos másodfokú egyenleteknek nevezzük.

Példa:

- Ha nincs elsőfokú tag az egyenletben:
  $x^2 = 64$ ebben az esetben azokat a számokat keressük, amiknek négyzete 64.
  $x_1 = 8,\ x_2 = -8$
- Ha nincs nulladfokú tag az egyenletben:
  $$x^2 - 3x = 0$$
  Emeljünk ki mindkét tagból x-et, akkor egy szorzatot kapunk.
  $$x(x-3) = 0$$
  A szorzat akkor 0, ha valamely tényezője 0

A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Definíció: Az egy ismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad ahol\ a, b, c\ \in\ R$$

Megoldóképlet:

- **két** valós gyöke van:
  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ha } D = b^2 - 4ac > 0$$
- **egy** valós gyöke van :
  $$x = -\frac{b}{2a}, ha\ D = 0$$
- **nincs** valós gyöke, ha $D < 0$

$D = b^2 - 4ac$ = ***Diszkrimináns***

A gyöktényezős alak

Példa:

Oldjuk meg $(x+3)(x-1) = 0$ egyelnetet.

Megoldás:

Egy szorzat akkor nulla, ha bármely tagja 0: $x + 3 = 0 \; vagy \; x - 1 = 0$

Azaz $x_1 = -3$ és $x_2 = 1$

Definíció: Az $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ alakot a másodfokú egyenlet *gyöktényezős alakjának* nevezzük.

A Viete-féle formulák

Az $ax^2 + bx + c = 0, \; ahol \; a, b, c \in R$ másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között fennállnak a következő összefüggések:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ és } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Példa:

Határozzuk meg a Viete-formulák segítségével a következő egyenlet gyökeit!

$x^2 + x - 6 = 0$

Megoldás: Az egyenletnek két különböző valós gyöke van, hiszen D > 0.

$a = 1$

$b = 1$

$c = -6$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{1} = -1$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{1} = -6$

Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk x_1 és x_2 értékét.

$x_1 = -3$ és $x_2 = 2$

Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek

A megoldás elve: átalakítások és helyettesítések során az egyenlet fokszámát csökkentjük, majd megoldóképlet segítségével a gyököket meghatározzuk.

Fontos: Egy n-ed fokú egyenletnek legfeljebb n valós megoldása létezhet.

Példa:

Határozzuk meg az egyenlet valós gyökeit: $x^4 + x^2 - 6 = 0$

Megoldás:

Észrevesszük a következő összefüggést és egy új ismeretlent (y) bevezetünk.

$x^4 = (x^2)^2 = y^2, azaz \; x^2 = y$

$y^2 + y - 6 = 0$ Az előző példából láthatjuk, hogy ennek az egyenletnek a megoldásai:

$y_1 = -3$ és $y_2 = 2$ visszahelyettesítva x^2-et y-ba, a következő egyenleteket kapjuk:űú

$y_1 = -3 = x^2$ → Nincs valós megoldása, hisz egy négyzetszám mindig pozitív.

$y_2 = 2 = x^2$→ $x_1 = \sqrt{2}$ és $x_2 = -\sqrt{2}$

Másodfokú egyenlőtlenség

A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásához egyik szükséges ismeret a *parabola* ábrázolása.

Példa:

Oldjuk meg az $x^2 - 4 < 0$ egyenlőtlenséget!

I. Megoldás:

Ábrázoljuk az $f(x) = x^2 - 4$ függvényt. Ez a függvény, akkor nulla, mikor metszi az x tengelyt, azaz $x_1 = 2, x_2 = -2$ helyen. Felfele nyíló parabola, ez által a két gyök között lesz a függvényünk negatív.$x \in]-2; 2[$

II. Megoldás:

$x^2 - 4 < 0 \quad \rightarrow \quad x^2 < 4 \quad \rightarrow \quad -2 < x < 2 \quad \rightarrow \quad x \in]-2; 2[$

Példa:

Mely egész számokra igaz, hogy $(x-2)^2 \leq 7 - 2x$?

Megoldás:

Elvégezzük a műveleteket, majd nullára rendezzük az egyenlőtlenséget és másodfokú megoldóképlettel meghatározzuk a zérushelyeket.

$x^2 - 4x + 4 \leq 7 - 2x$

$x^2 - 2x - 3 \leq 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$x_1 = 3, x_2 = -1$

Ha az egyenlőtlenség ($x^2 - 2x - 3 \leq 0$) bal oldalára függvényként tekintünk, ami egy felfelé nyíló parabola, ezért a megoldásokat a két zérus hely között keressük. $x \in \{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

Megjegyzés: Az olyan egyenlőtlenségeket, melynek megoldásainak halmaza megegyezik az értelmezési tartománnyal, azonos egyenlőtlenségeknek nevezzük.

Négyzetgyökös egyenletek

A gyökjel miatt első lépésként megadjuk a valós számok legbővebb részhalmazát, amelyen a megoldást keressük (kikötés). Második lépésként érdemes a gyökös tagokat az egyenlet egyik oldalára rendezni a nem gyökös tagokat pedig a másik oldalra.

Példa:

Keressük meg a $\sqrt{5-x}+3=x$ egyenlet megoldását!

Kikötés: Négyzetgyök alatt nem állhat negatív szám. $5-x \geq 0 \quad \rightarrow \quad 5 \geq x$

$\sqrt{5-x}+3=x \qquad /-3$

$\sqrt{5-x}=x-3 \qquad /()^2$

$5-x=x^2-6x+9 \qquad /rendezés\ 0-ra$

$x^2-5x+4=0 \qquad /másodfokú\ egyenlet\ megoldóképlet$

$x_1=-1, x_2=-4$

Számtani és mértani közép

Definíció:Két nem negatív szám számtani közepén a két szám összegének felét értjük (átlag).

$$A(a,b)=\frac{a+b}{2}$$

Definíció Két nem negatív szám mértani közepén a két szám szorzatának négyzetgyökét értjük.

$$G(a,b)=\sqrt{a\cdot b}$$

Tétel: A számtani és mértani közötti egyenlőtlenség.

$$\sqrt{a\cdot b}\leq\frac{a+b}{2}$$