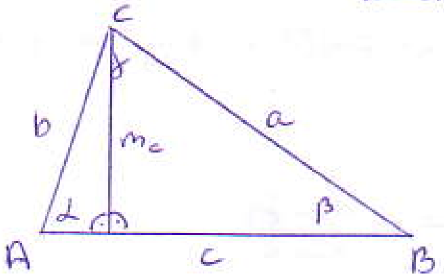
Szinusztétel

Tétel: Tetszőleges háromszögben bármely két oldal hosszának aránya megegyezik az oldalakkal szemközti szögek szinuszainak arányával.



m_c kétféleképpen is kifejezhető:

$$\sin\alpha = \frac{m_c}{b} \qquad \sin\beta = \frac{m_c}{a}$$

$$b \cdot \sin\alpha = m_c \qquad a \cdot \sin\beta = m_c$$

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}}$$

Ugyanígy kimutatható a többi oldalra is.

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

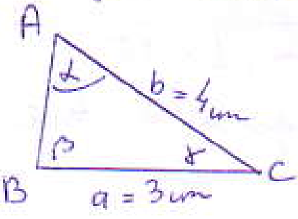
Tétel: Tetszőleges háromszög területe megegyezik két oldal hosszának és az általuk közbezárt szög szinusza szorzatának a felével.

$$T = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} \qquad \text{vagy } T = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin\beta}{2}$$

$$\text{vagy } T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

Alapfeladatok

1. Egy háromszögben $a = 3\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm}$, $\alpha = 45°$. Mekkorák a hiányzó szögek illetve c oldal?



$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\sin 45°}{\sin\beta}$$

$$3\sin\beta = 4\sin 45°$$

$$\sin\beta = \frac{4 \cdot \sin 45°}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} = 0{,}9428$$

$$\beta_1 = 70{,}5°$$

$$\beta_2 = 180 - 70{,}5° = 109{,}5°$$

Ha $\beta_1 = 70{,}5°$
$\alpha_1 = 45°$
$\gamma_1 = 180° - 70{,}5° - 45° = 64{,}5°$

Ha $\beta_2 = 109{,}5°$
$\alpha_2 = 45°$
$\gamma_2 = 180° - 109{,}5° - 45° = 25{,}5°$

γ kiszámolásánál felhasználtuk, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°.

Kétféle háromszöget kapunk; egy hegyesszögűt és egy tompaszögűt.
Kétféle c értéket kell számolnunk.

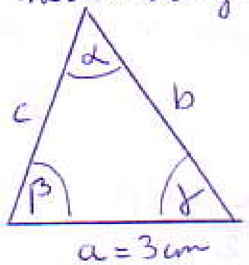
$$\frac{c_1}{a} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_1}$$
$$\frac{c_1}{3} = \frac{\sin 64{,}5°}{\sin 45°}$$
$$c_1 = 3 \cdot \frac{\sin 64{,}5°}{\sin 45°} = \underline{\underline{3{,}83\,cm}}$$

$$\frac{c_2}{a} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2}$$
$$\frac{c_2}{3} = \frac{\sin 25{,}5°}{\sin 45°}$$
$$c_2 = 3 \cdot \frac{\sin 25{,}5°}{\sin 45°} = \underline{\underline{1{,}83\,cm}}$$

A megoldások vizsgálatánál felhasználjuk, hogy nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög található. Mind a két megoldás jó.

---

2) Egy háromszögben $a = 3cm$, $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$. Határozd meg a háromszög hiányzó oldalait, területét!

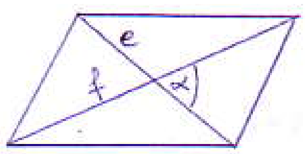


$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 30° - 70° = 80°$$
$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$
$$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 3 \cdot \frac{\sin 70°}{\sin 30°} = \underline{\underline{5{,}64\,cm}}$$
$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$
$$c = 3 \cdot \frac{\sin 80°}{\sin 30°} = \underline{\underline{5{,}9\,cm}}$$

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{3 \cdot 5{,}64 \cdot \sin 80°}{2} = 8{,}33\,cm^2$$

---

3) Egy paralelogramma két átlójának hossza $e = 10cm$, $f = 15cm$. Mekkora az átlók által bezárt szög, ha a paralelogramma területe $50\,cm^2$?



$$\boxed{T = \frac{e \cdot f \cdot \sin\alpha}{2}}$$
$$50 = \frac{10 \cdot 15 \cdot \sin\alpha}{2}$$
$$100 = 150 \cdot \sin\alpha$$
$$\frac{100}{150} = \sin\alpha \Rightarrow \alpha = 41{,}8°$$