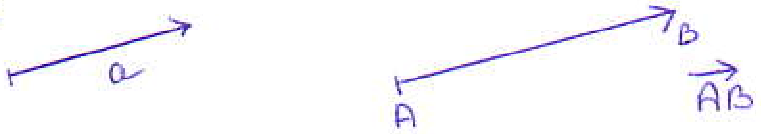
11. évfolyam

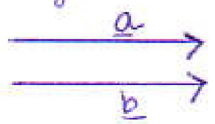
Vektorok; vektorok skaláris szorzata

A vektor egy irányított szakasz. / Iránya és nagysága jellemzi.

Jelölése:



Két vektor akkor és csak akkor egyezik meg egymással, ha irányuk és nagyságuk egyenlő.



$\underline{a} = \underline{b}$

Ellentett vektorok: a két vektor párhuzamos egymással, azonos nagyságúak és ellentétes irányúak.

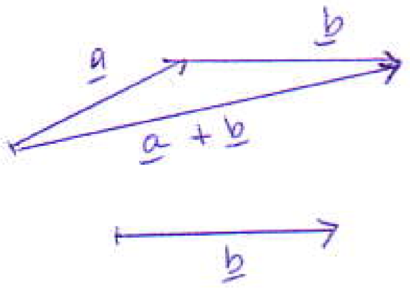
$\underline{a} \neq \underline{b}$

$\underline{a} = -\underline{b}$

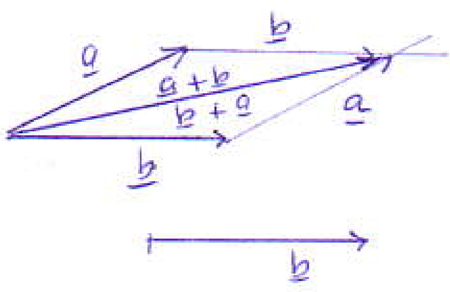
Nullvektor: nagysága nulla, iránya tetszőleges.

Vektorok összeadása

Háromszög módszer

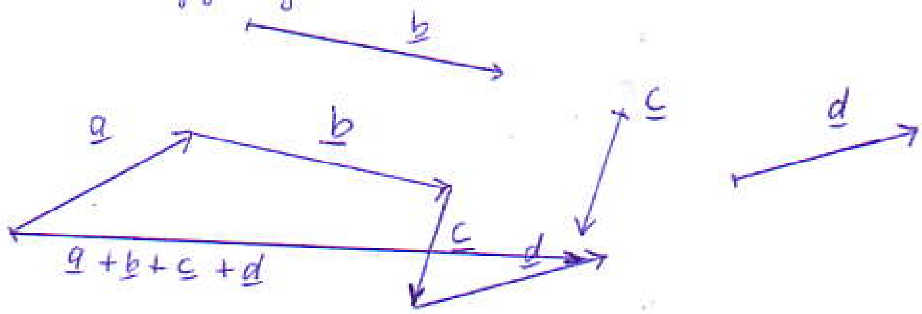


Paralelogramma módszer

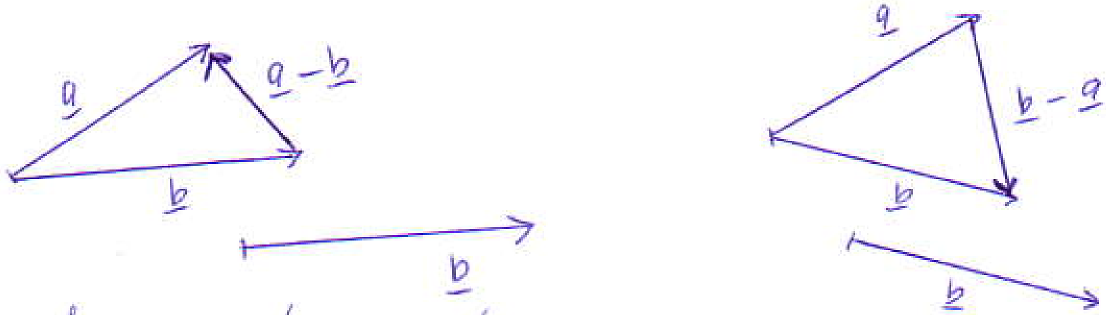


$\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$

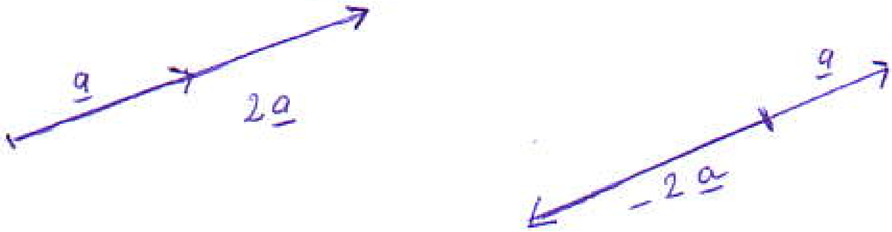
Több vektor esetén láncszerűen mérjük fel irány és nagyság szerint a vektorokat.



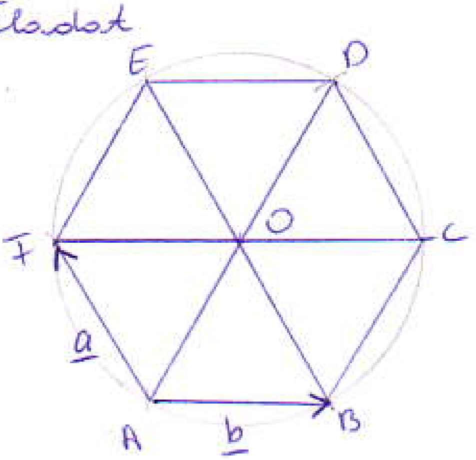
Vektorok kivonása



Vektorok szorzása számmal



Feladat



Ki kell fejezni $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokkal a következő vektorokat!

$\overrightarrow{AO} = \underline{a} + \underline{b}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{b} + \underline{a} + \underline{b} = \underline{a} + 2\underline{b}$

$\overrightarrow{BF} = \underline{a} - \underline{b}$

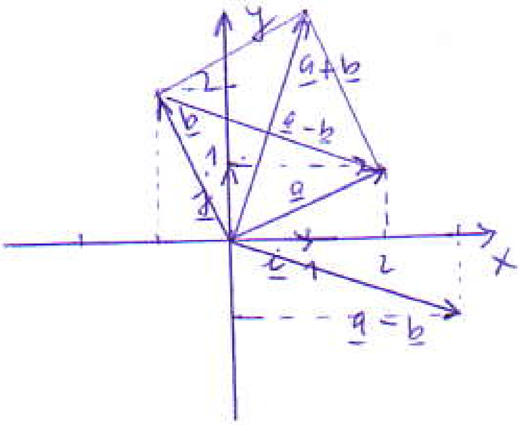
$\overrightarrow{AD} = 2(\underline{a} + \underline{b})$

$\overrightarrow{OF} = -\underline{b}$

$\overrightarrow{BE} = 2\underline{a}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \underline{a} + \underline{a} + \underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$

Vektorok a koordináta rendszerben:



$\left.\begin{array}{l} |\underline{i}| = |\underline{j}| = 1 \\ \underline{i} \perp \underline{j} \end{array}\right\}$ bázisvektorok

minden vektor megadható

$\underline{a} = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j}$ alakban

Általánosan

pl. $\underline{a} = 2\underline{i} + 1\underline{j}$

$\underline{b} = -1\underline{i} + 2\underline{j}$

$\underline{a} + \underline{b} = 1\underline{i} + 3\underline{j}$

$\underline{a} - \underline{b} = 3\underline{i} - 1\underline{j}$

$\underline{a} = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j}$

$\underline{b} = x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j}$

$\underline{a} + \underline{b} = (x_1 + x_2)\underline{i} + (y_1 + y_2) \cdot \underline{j}$

$\underline{a} - \underline{b} = (x_1 - x_2)\underline{i} + (y_1 - y_2)\underline{j}$

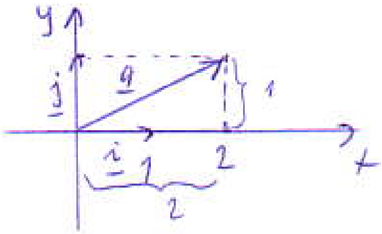
$\lambda \cdot \underline{a} = \lambda x_1 \underline{i} + \lambda \cdot y_1 \underline{j}$

Feladat: $\underline{a} = 3\underline{i} - 4\underline{j}$ Add meg a $3\underline{a} - 2\underline{b}$ vektor koordinátáit!

$\underline{b} = -5\underline{i} + 3\underline{j}$

$$3\underline{a} = 9\underline{i} - 12\underline{j}$$
$$2\underline{b} = -10\underline{i} + 6\underline{j}$$
$$3\underline{a} - 2\underline{b} = (9-(-10))\underline{i} + (-12-6)\underline{j} = 19\underline{i} - 18\underline{j}$$

Vektor hossza



$\underline{a} = 2\underline{i} + 1\underline{j}$

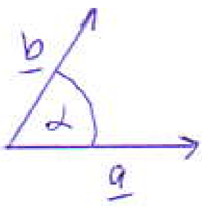
Pitagorasz tételt alkalmazva

$$|\underline{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Általánosan: $\underline{a} = x_1 \cdot \underline{i} + y_1 \cdot \underline{j}$

$$|\underline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Vektorok skaláris szorzata



$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha$$

A skaláris szorzat lehet pozitív (hegyesszög esetén), negatív (tompaszög esetén), és nulla.

Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla, ha a két vektor merőleges egymásra.

Feladat $|\underline{a}| = 3$ $|\underline{b}| = 5$ $\alpha = 40°$ $\Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 3 \cdot 5 \cdot \cos 40° = 3 \cdot 5 \cdot 0{,}7660 = 11{,}5$

Ha a vektorok koordinátákkal vannak megadva, akkor a skaláris szorzat: $\underline{a} \cdot \underline{b} = x_1 x_2 + y_1 \cdot y_2$

például: $\underline{a} = 3\underline{i} - 4\underline{j}$ $\underline{a} \cdot \underline{b} = 3 \cdot (-5) + (-4) \cdot 3 = (-15) + (-12) = -27$

$\underline{b} = -5\underline{i} + 3\underline{j}$

Ki lehet számolni a két vektor által bezárt szöget is.

$\underline{a} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$

$\underline{b} = -4\underline{i} + 5\underline{j}$

$(\underline{a}; \underline{b})\sphericalangle = ?$

1. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 = -8 + 15 = 7$

2. $|\underline{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

   $|\underline{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

3. $7 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos\alpha = \sqrt{13 \cdot 41} \cdot \cos\alpha$

   $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{13 \cdot 41}} = \frac{7}{\sqrt{533}} = \frac{7}{23{,}087} = 0{,}3032$

   $\alpha = 72{,}35°$

1) Adott az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor. Szerkeszd meg az $\underline{a}+\underline{b}$; $\underline{a}-\underline{b}$ és $2\underline{a}+3\underline{b}$ vektorokat!

2) Adott az $\underline{a} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$ és $\underline{b} = -4\underline{i} + 2\underline{j}$ vektor.

a) Ábrázold a koordináta-rendszerben!

b) Add meg az $\underline{a}+\underline{b}$; $\underline{a}-\underline{b}$; $3\underline{a}-2\underline{b}$; $5\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}$ vektorok koordinátáit! Add meg $|\underline{a}|$ és $|\underline{b}|$ értékét!

3) Számold ki $\underline{a}\cdot\underline{b}$ értékét, ha $|\underline{a}| = 2$ $|\underline{b}| = 3$ $(a;b)\sphericalangle = 120^\circ$

4) Mekkora $(a;b)\sphericalangle$, ha $\underline{a}\cdot\underline{b} = 10$ $|\underline{a}| = 3$ $|\underline{b}| = 4$?

5) Adott az $\underline{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j}$ és $\underline{b} = -4\underline{i} + \underline{j}$ vektor. Számold ki $\underline{a}\cdot\underline{b}$ értékét!

6) Adott $\underline{a} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$ és $\underline{b} = 4\underline{i} - 3\underline{j}$ vektorok. Mekkora szöget zárnak be egymással?

7) Adott az $\underline{a} = 2\underline{i} + 4\underline{j}$; $\underline{b} = -3\underline{i} + 2\underline{j}$ és $\underline{c} = -3\underline{j}$ vektor. Számold ki:

$\underline{a}\cdot(\underline{b}+\underline{c}) =$

$(2\underline{a}-\underline{b})\cdot\underline{c} =$

$(\underline{a}\cdot\underline{b})\cdot\underline{c} =$

8) Adott egy derékszögű háromszög. $|\underline{a}| = 2$ $|\underline{b}| = 3$

Számold ki: $\underline{a}\cdot\underline{b} =$

$\underline{a}(\underline{a}+\underline{b}) =$

$\underline{a}(\underline{a}-\underline{b}) =$

$\underline{b}(\underline{a}-\underline{b}) =$